

## BÀI TẬP CHƯƠNG II

### §1. Đồng dư thức

45. Chứng minh rằng  $100a + 10b + c \equiv 0 \pmod{21}$  khi và chỉ khi  $a - 2b + 4c \equiv 0 \pmod{21}$ .
46. Tìm phép dư trong phép chia:  $10!$  chia cho 11.
47. Chứng minh rằng:  $4^{2n+1} + 3^{n+2}$  chia hết cho 13 với  $n = 0, 1, 2, \dots$
48. Chứng minh rằng với mọi  $n \in \mathbb{N}$  ta có:  $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ ;
49. Tìm số dư trong phép chia:
- $51200^{2^{100}}$  cho 41;
  - $1035125^{5642}$  cho 17.
50. Kiểm tra lại rằng  $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$  và từ đó suy ra  $\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 5 \pmod{7}$ .
51. Chứng minh rằng  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ta có:
- $10^{6n} + 10^{3n} + 2 \equiv 0 \pmod{111}$ ;
  - $7^{2n+1} - 48n - 7 \equiv 0 \pmod{288}$ .
52. Chứng minh  $p = 1093$  là số nguyên tố và  $2^{1092} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ .

### §2. Vành các lớp thặng dư

53. Trong mỗi lớp  $\overline{238} \pmod{12}$ ,  $\overline{5^{1945}} \pmod{12}$  hãy tìm các thặng dư có giá trị tuyệt đối nhỏ nhất.
54. Xét lớp  $A = \overline{13} \pmod{15}$ . Hỏi  $A$  có là một tập con của lớp thặng dư nào trong  $\mathbb{Z}_3$  hay không? Cũng như thế đối với  $\mathbb{Z}_4$ .
55. Hãy chứng tỏ rằng  $\mathbb{Z}_7^* = \{\overline{3^k} / k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .
56. Các lớp  $\overline{2000} \pmod{15}$ ,  $\overline{5181} \pmod{15}$ ,  $\overline{291998} \pmod{15}$ , có phần tử khả nghịch của vành  $\mathbb{Z}_{15}$  hay không? Tại sao?
57. a) Hãy tìm nghiệm của đa thức  $f(X) = \overline{4}X - \overline{2}$  trong vành  $\mathbb{Z}_6$ .  
b) Hãy tìm nghiệm của đa thức  $f(X) = \overline{1}X^2 + \overline{2}$  trong vành  $\mathbb{Z}_{19}$ .
- theo môđun  $m$ .
58. Chứng minh rằng nếu các số  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_m + b$  lập thành một hệ thặng dư đầy đủ môđun  $m$  thì các số  $x_1, x_2, \dots, x_m$  cũng lập thành một hệ thặng dư đầy đủ môđun  $m$ .
59. Hãy tìm một hệ TDTG mod 15 có chứa số 1997.
60. Giả sử  $a, b$  là những số nguyên ở đó  $a$  nguyên tố với  $m$  và  $b$  chia hết cho  $m$ . Chứng minh rằng khi  $x$  chạy qua một hệ TDTG mod  $m$  thì  $ax + b$  cũng chạy qua một hệ TDTG mod  $m$ .
61. Cho  $m_1, m_2, \dots, m_k$  là những số tự nhiên khác không và đôi một nguyên tố cùng nhau. Đặt  $m = m_1 m_2 \dots m_k$  và  $a_i = \frac{m}{m_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Chứng minh rằng khi  $x_i$  chạy qua một hệ TDTG mod  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) thì  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k$  chạy qua một hệ TDTG mod  $m$ .
62. Tìm tập hợp  $\{(m; n) \in \mathbb{N}^2 / 2^m - 3^n = 1\}$ .

### §3. Định lý Ô-le - Định lý Phéc-ma

63. Tìm tất cả các số tự nhiên  $m$  biết rằng:
- Dạng phân tích tiêu chuẩn  $m = 3^\alpha 5^\beta 7^\gamma$  và  $\varphi(m) = 3600$ .
  - Dạng phân tích tiêu chuẩn  $m = 2^\alpha p$  và  $\varphi(m) = 8$ .
64. Cho  $p$  là một số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng  $p$  là một số nguyên tố khi và chỉ khi  $\varphi(p) = p - 1$ .

- 65.** Giả sử  $a$  là một số nguyên tố với môđun  $m$  và  $\alpha, \beta$  là hai số tự nhiên thoả mãn  $\alpha \equiv \beta \pmod{\varphi(m)}$ . Chứng minh rằng:  $a^\alpha \equiv a^\beta \pmod{m}$ .
- 66.** Chứng minh rằng nếu  $a$  nguyên tố với 240 thì  $a^4 - 1$  chia hết cho 240.
- 67.** Chứng minh rằng:  $20^{15} - 1 : 11.31.61$
- 68.** Tìm số dư trong các phép chia:  
a)  $3^{40}$  chia cho 83;                      b)  $35^{150}$  chia cho 425.
- 69.** Chứng minh rằng nếu:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n : 30$  thì  $a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5 : 30$ .
- 70.** Chứng minh rằng với  $n \geq 1$  ta có:  
a)  $(2^{3^{4n+1}} + 3) : 11$                       b)  $(2^{2^{10n+1}} + 19) : 23$                       c)  $(2^{2^{6n+2}} + 21) : 37$
- 71.** Tìm hai số tận cùng bên phải khi viết các số sau đây trong hệ thập phân:  
a)  $9^{9^9}$     b)  $14^{14^{14}}$
- 72.** Chứng minh:  $n^7 - n \equiv 0 \pmod{42}$ .
- 73.** Chứng minh rằng nếu  $24a^2 + 1 = b^2$  thì một và chỉ một trong các số  $a$  và  $b$  là bội của 5.
- 74.** Cho  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 17. Chứng minh:  $p^{16} - 1 \equiv 0 \pmod{16320}$ .
- 75.** Chứng minh rằng với  $p$  là một số nguyên tố lớn hơn 7 thì  $(3^p - 2^p - 1) : 42p$ .
- 76.** Cho  $a$  là một số lẻ nguyên tố với 3 và 5.  
a) Chứng minh rằng:  $(a^2 - 1)(a^4 - 16) \left[ a^2 - (2n+1)^2 \right]^2 \equiv 0 \pmod{23040}$ .  
b) Cho  $a$  là số nguyên lẻ nguyên tố với 5. Chứng minh  $(a^2 - 1)(a^2 - 9)(a^2 - 49) \equiv 0 \pmod{23040}$ .